関数の近似特性について

著者	竹田 啓人
URL	http://hdl.handle.net/10236/00028904

2019 年度 修士論文要旨

関数の近似特性について

関西学院大学大学院 理工学研究科
数理科学専攻 北原研究室　竹田　啓人

$[a,b]$ 上の 2 つの連続な関数のグラフではさまれる閉領域を考え，近似関数空間に属する関数のうち，グラフがその閉領域を通過する関数が存在するための条件についてさまざまな状況下で考察した結果についてまとめたものである．

問題設定

一般的な問題として以下の問題について考えていくものとする．
D を $\mathbb{R}^n$ の有界閉領域とする．このとき $x \in D$ で定義される異なる二つの関数を $f(x), g(x) \in C[D]$ $(f(x) \leq g(x))$ とし，この 2 つの関数によってできる領域 $A_{f,\,g}$ を

$$A_{f,\,g} = \{(x,y)|f(x) \leq y \leq g(x), x \in D\}$$

とする．また，$\{1, u_1, \ldots, u_k\}$ を $C[D]$ の一次独立な関数からなる関数系とし，$S =$Span$\{1, u_1, \ldots, u_k\}$, $k \in \mathbb{N}$ とおく．このとき，$f(x) \leq h(x) \leq g(x), x \in D$ を満たすような $h(x) \in S$ の存在について考える．
この問題に対して，いくつかの状況下での通過関数の存在について考える.

準備

本研究を進めるにあたり必要な定義について説明する ([1],[2] を参考にしている)
定義 (重みつき最大値ノルム)
D を $\mathbb{R}^n$ の有界閉領域とする．任意の $f, w \in C[D], w(x) > 0, x \in D$ に対して，ノルムを

$$||f||_{w,\infty} = \max_{x\in D} w(x)|f(x)|$$

とする．このとき，$||f||_{w,\infty}$ のことを**重みつき最大値ノルム**と呼ぶ．また，$w(x)$ は**重み関数**と呼ぶことにする．
定義 (最良近似)
近似集合 G を線形ノルム空間 $(E, ||\cdot||)$ の部分集合とし，f を E の固定された関数とする．このとき，

$$||f - g_0|| = \inf_{g\in G} ||f - g||$$

を満たす $g_0 \in G$ が存在するならば，g_0 を f の G からの**最良近似**という．
定義 (関数のグラフの通過について)
D を $\mathbb{R}^n$ の有界閉領域とする．D 上の 2 つの関数 $f(x), g(x) \in C[D]$ は $f(x) \leq g(x), x \in D$ をみたすものとする. このとき,$A_{f,g} = \{(x,y)|f(x) \leq g(x), x \in D\}$ を考え，関数 $h(x) \in C[D]$ が

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x), x \in D$$

を満たすとき，関数 $h(x)$ のグラフは**2 つの関数によってできる領域** $A_{f,\,g}$ **を通過する**といい，この $h(x)$ を $A_{f,\,g}$ **に対する通過関数**という．

関数の近似特性について

定理 2-1

$C[a,b]$ において，$f < g$ である 2 つの関数について，領域

$$A_{f,g} = \{(x,y) | f(x) \leq y \leq g(x), x \in [a,b]\}$$

を考える．2 つの関数 f, g に対して，平均の値をとる関数を $h(x) = \dfrac{f(x)+g(x)}{2}$ を考える．
$\{1, u_1, \ldots, u_n\}$ を一次独立な関数からなる関数系とし，$S = \mathrm{Span}\{1, u_1, \ldots, u_n\}$ とおく．
$(C[a,b], ||\cdot||_{\frac{1}{v(x)},\infty})$ において，$h(x)$ の S からの最良近似を u^* としたとき，$A_{f,g}$ に対する S の通過関数が存在するための必要十分条件は，

$$||h - u^*||_{\frac{1}{v(x)},\infty} \leq 1$$

が成り立つことである．特に $||h - u^*||_{w,\infty} = 1$ ならば，$h(x)$ の S からの最良近似のみが $A_{f,g}$ に対する S からの通過関数となる．

系 2-2

$f(x) \in C[a,b], c \in \mathbb{R}(c > 0)$ について，$A_{f,\,f+c} = \{(x,y) | f(x) \leq y \leq f(x)+c, x \in [a,b]\}$ とする．$C[a,b]$ の一次独立な関数からなる関数系を $\{1, u_1, \ldots, u_n\}$，$S = \mathrm{Span}\{1, u_1, \ldots, u_n\}$ とし，また，領域を形成する関数の平均関数 $h(x)$ を,$h(x) = f(x) + \dfrac{c}{2}$ とし，$d = \min_{u \in S} ||h - u||_\infty$ とする．このとき，$A_{f,\,f+c}$ について通過関数 $u \in S$ が存在する必要十分条件は，

$$2d \leq c$$

が成り立つことである．

定理 2-3

$C[a,b]$ において，$f \leq g$ である 2 つの関数について，領域

$$A_{f,g} = \{(x,y) | f(x) \leq y \leq g(x), x \in [a,b]\}$$

を考える．2 つの関数 f, g，任意の $c(> 0)$ について，$h_c(x) = \dfrac{f(x)+g(x)+c}{2}$ を考える．
$\{1, u_1, \ldots, u_n\}$ を一次独立な関数からなる関数系とし，$S = \mathrm{Span}\{1, u_1, \ldots, u_n\}$ とおく．任意の $c(> 0)$ に対して，$(C[a,b], ||\cdot||_{\frac{1}{v_c(x)},\infty})$ において，h_c の S からの最良近似を u_c^* としたとき，$A_{f,g}$ に対する S からの通過関数が存在するための必要十分条件は，

$$||h_c - u_c^*||_{\frac{1}{v_c(x)},\infty} < 1, c > 0$$

が成り立つことである.

参考文献

[1] 原田　真也　部分空間における稠密性について〜ワイエルストラスの多項式近似定理の一般化〜，関西学院大学大学院修士論文，2016

[2] 林　裕哉　最良近似を用いたチェビシェフ多項式の一般化，関西学院大学大学院修士論文 2018